$x : [a,b] \to R^n$, абсолютно непрерывных на $[a,t_0]$ и $(t_0,b]$, имеющих при почти всех t производную $x' \in L([a,b],R^n)$, терпящих в точке t_0 скачок величины $x(t_0+0) - x(t_0) = Px^{t_0}$, с метрикой $\rho(x_1,x_2) = |x_1(a) - x_2(a)| + \int\limits_a^b |x_1'(s) - x_2'(s)|\,ds$.

Рассмотрим уравнение

$$x' = Kx \tag{2}$$

с оператором $K : CS([a,b],R^n) \to L([a,b],R^n)$. Сведение задачи Коши для уравнения (2) к уравнению второго рода в пространстве $L([a,b],R^n)$ основывается на взаимно-однозначном соответствии между метрическим пространством $ACS([a,b],R^n)$ и декартовым произведением $L([a,b],R^n) \times R^n$, которое осуществляется отображениями $x \in ACS \mapsto (x',\, x(a)) \in L \times R^n$, $(y,\alpha) \in L \times R^n \mapsto x \in ACS$, $x(t) = x(a) + \int\limits_a^t y(s)\,ds + \chi(t-t_0)\,P\int\limits_a^{(\cdot)} y(s)\,ds$. Здесь $\chi(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \geqslant 0, \\ 0, & \text{если } t < 0. \end{cases}$

Т е о р е м а. *Если оператор* $K : CS([a,b],R^n) \to L([a,b],R^n)$ *является непрерывным, ограниченным и вольтерровым, то задача Коши для уравнениея (2) с начальным условием* $x(a) = \alpha$, *при любом* α, *в пространстве* $ACS([a,b],R^n)$ *локально разрешима, всякое локальное решение продолжаемо до глобального или предельно продолженного.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Институт компьютерных исследований, 2002. 384 с.

Поступила в редакцию 8 ноября 2006 г.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ СОПРЯЖЕННОГО ОПЕРАТОРА

© Е.С. Жуковский, М.В. Борзова

Для интегрального оператора Volterra $(Ky)(t) = \int\limits_a^t \mathcal{K}(t,s)\,y(s)\,ds$, действующего в пространстве $L([a,b],R)$ суммируемых функций, сопряженный оператор $K^* : L_\infty([a,b],R) \to L_\infty([a,b],R)$ имеет вид $(K^*g)(t) = \int\limits_t^b \mathcal{K}(s,t)\,g(s)\,ds$, то есть является опережающим. Ниже установлена связь между свойствами вольтерровости исходного и сопряженного линейных операторов, действующих в произвольных нормированных пространствах. Используется определение вольтерровости, предложенное в [1].

Пусть B – нормированное пространство, B^* – сопряженное пространство, и пусть каждому $\gamma \in [0,1]$ поставлено в соответствие отношение эквивалентности $\upsilon(\gamma)$ элементов пространства B. Назовем элементы $x,y \in B$, удовлетворяющие этому бинарному отношению, $\upsilon(\gamma)$-эквивалентными. Будем предполагать, что совокупность $\mathfrak{V} = \{\,\upsilon(\gamma) \mid \gamma \in [0,1]\,\}$ рассматриваемых отношений удовлетворяет условиям: $\upsilon(0) = B^2$; $\upsilon(1) = \{\,(x,x)\ x \in B\,\}$; $\gamma > \eta \Rightarrow \upsilon(\gamma) \subset \upsilon(\eta)$. Кроме того, будем считать, что отношения $\upsilon(\gamma) \in \mathfrak{V}$ сохраняются при сложении векторов и умножении их на числа, т. е. при каждом $\gamma \in (0,1)$, для любых элементов $x, \widehat{x}, y, \widehat{y} \in B$ и всякого числа λ

$$(x,\widehat{x}) \in \upsilon(\gamma), \quad (y,\widehat{y}) \in \upsilon(\gamma) \ \Rightarrow\ (x+y, \widehat{x}+\widehat{y}) \in \upsilon(\gamma), \quad (\lambda x, \lambda\widehat{x}) \in \upsilon(\gamma).$$

О п р е д е л е н и е. Оператор $F : B \to B$ будем называть *вольтерровым на системе* $\mathfrak{V}$, если для каждого $\gamma \in (0,1)$ и любых $x,y \in B$ из $(x,y) \in \upsilon(\gamma)$ следует $(Fx,\ Fy) \in \upsilon(\gamma)$.

Определим множества

$$0_\gamma = \{ y \in B \mid (y, 0) \in \upsilon(\gamma) \}, \quad 0^*_\gamma = 0^\perp_{1-\gamma} = \{ g \in B^* \mid \forall y \in 0_{1-\gamma} \ gy = 0 \}.$$

Зададим в сопряженном пространстве B^* систему $\mathfrak{V}^*$ отношений эквивалентности, считая функционалы f, g $\upsilon^*(\gamma)$-эквивалентными, если $f - g \in 0^*_\gamma$. Система $\mathfrak{V}^*$ отношений эквивалентности элементов пространства B^* обладает всеми перечисленными выше свойствами.

Т е о р е м а. *Если линейный оператор $F : B \to B$ вольтерров на системе $\mathfrak{V}$, то сопряженный оператор $F^* : B^* \to B^*$ будет вольтерровым на системе $\mathfrak{V}^*$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Жуковский Е.С.* Непрерывная зависимость от параметров решений уравнений Вольтерра // Мат. сборник. 2006. Т. 197. № 10. С. 33-56.

БЛАГОДАРНОСТИ: Работа выполнена при поддержке Российского Фонда Фундаментальных Исследований (грант № 04-01-00324) и Норвежского комитета по развитию университетской науки и образования - NUFU (проект № PRO 06/02).

Поступила в редакцию 8 ноября 2006 г.

POSITIVE INVARIANCE AND PERIODIC SOLUTIONS FOR DIFFERENTIAL INCLUSION WITH NON-CONVEX RIGHT-HAND SIDE

© E. Panasenko

The talk is concerned with the non-autonomous ordinary differential inclusion in finite dimensional space with periodic, compact, but non necessarily convex valued right-hand side. It is shown that if for such an inclusion there exists a strongly positively invariant set $\mathfrak{M}$, then there exists a periodic solution of the inclusion which stays in $\mathfrak{M}$.

Let $\mathbb{R}^n$ be a Euclidian space with the scalar product $\langle x, y \rangle$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, usual norm $|x| = \sqrt{\langle x, y \rangle}$, and metric $\rho(x, y) = |x - y|$, and let comp$(\mathbb{R}^n)$ stand for a set of all compact subsets of $\mathbb{R}^n$. By $AC([t_0, t_1], \mathbb{R}^n)$ we denote the space of all absolutely continuous functions $x : [t_0, t_1] \to \mathbb{R}^n$ with the norm $\|x\|_{AC} = |x(t_0)| + \int_{t_0}^{t_1} |\dot{x}(t)| dt$.

Consider an ordinary differential inclusion

$$\dot{x} \in F(t, x), \tag{1}$$

where $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \to$ comp$(\mathbb{R}^n)$ satisfies Caratheodory conditions. As a *solution of* (1) on an interval $I \subset \mathbb{R}$ we suppose a function $x \in AC(I, \mathbb{R}^n)$ satisfying inclusion (1) for a.e. $t \in I$, so we deal with the Caratheodory type solutions.

Let a map $M : \mathbb{R} \to$ comp$(\mathbb{R}^n)$ be continuous and denote a set

$$\mathfrak{M} \doteq \{(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : x \in M(t)\}, \tag{2}$$

which represents the graph of M. The set $\mathfrak{M}$ is called *strongly positively invariant under inclusion* (1) if for every point $z_0 = (t_0, x_0) \in \mathfrak{M}$ any solution $t \to x(t, z_0)$ of the Cauchy problem for (1) with initial condition $x(t_0) = x_0$ satisfies $(t, x(t, z_0)) \in \mathfrak{M}$ for every $t \geqslant t_0$.